

# A CONSTRUÇÃO DE SENTIDOS E SIGNIFICADOS DA INTEGRAL DEFINIDA NA PERSPECTIVA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Janine Freitas Mota<sup>1</sup>

## GD 4 - Educação Matemática no Ensino Superior

**Resumo:** Este trabalho é um recorte de uma tese de doutorado em desenvolvimento e tem como temática os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, em cursos de Matemática e/ou Engenharias, na perspectiva do Pensamento Matemático Avançado. O objetivo apresentado na pesquisa é desenvolver uma alternativa pedagógica que contemple as aplicações, o aprimoramento do conhecimento e do significado da Integral Definida, em contextos intramatemáticos e extramatemáticos. Nesse texto, de concepção teórica, são abordados aspectos relacionados às dificuldades na aprendizagem do Cálculo Integral, em particular, da Integral Definida. A exploração de aplicações desse conteúdo, em distintas áreas, é considerada como uma possibilidade para o seu ensino e para sua aprendizagem. Aspectos teóricos, metodológicos e tecnológicos são apresentados como orientadores da estratégia pedagógica. Como resultado parcial, é apresentada uma proposta de articulação entre a teoria e a prática na perspectiva de melhorias na qualidade do ensino e aprendizagem da Integral Definida.

**Palavras-chave:** Integral Definida. Tecnologias Digitais no Ensino do Cálculo. Educação Matemática no Ensino Superior.

## INTRODUÇÃO

Destacamos, neste trabalho, antecedentes de nossa trajetória profissional e ressaltamos a problemática relacionada aos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Integral, mais precisamente da Integral Definida, no âmbito da Educação Matemática. Sintetizamos pesquisas utilizadas em nossa revisão bibliográfica, centradas em nosso objeto de estudo, o que possibilitou enunciarmos a questão de pesquisa e os objetivos. Abordamos aspectos da teoria cognitivista do Pensamento Matemático Avançado, utilizada em nossa pesquisa como um referencial teórico que poderá trazer contribuições nos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais, com enfoque para as aplicações em contextos intramatemáticos e extramatemáticos.

Atuando como docente em cursos da área de Ciências Exatas, em instituições públicas e privadas, percebemos, já nos primeiros semestres, uma grande disparidade entre o currículo vivenciado no ensino médio e a base preparatória para cursos dessa área. A

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP; Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática; Doutorado em Educação Matemática; janinemota@gmail.com; orientador(a): Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar. abarcaap@pucsp.br

grande maioria dos estudantes recém-formados no ensino médio que ingressa na graduação em um curso de ciências exatas se depara com extrema dificuldade de aprendizagem, especialmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Essa disciplina é constituída por um amplo domínio de conhecimentos relevantes para a sociedade científica, principalmente, pela potencialidade de sua utilização na resolução de problemas de distintas áreas. Sua capacidade de reduzir problemas complexos em procedimentos simples, nas mais diversas áreas, faz desse conteúdo matemático uma descoberta importante da humanidade.

As dificuldades encontradas pelos estudantes para a compreensão dos conceitos do Cálculo, que na maioria das vezes estão relacionadas a conceitos da Matemática Básica, levam a um elevado índice de evasão e reprovação nos primeiros períodos dos cursos.

Distintos pesquisadores, como Tall (2002), Rezende (2003), Reis (2009), Alves (2011), evidenciaram que tais dificuldades não fazem parte de um cenário apenas brasileiro, mas constatadas em âmbito internacional, como destaca Rezende (2003). Esse autor ressalta um movimento internacional, organizado na década de 80, intitulado *Calculus's Reform*, que procurou reorganizar o ensino de Cálculo utilizando, como inovação, recursos tecnológicos.

Essa problemática é composta por vários fatores, como: i) causas de natureza cognitiva (falta de compreensão de significados), como exposto por Tall (2002); ii) as de natureza didática, que se referem à dificuldade em encontrar a metodologia mais adequada ao ensino; iii) dificuldades de natureza epistemológica, na qual “as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo” (REZENDE, 2003, p. 4); iv) falta de conhecimentos prévios e dificuldades relacionadas ao raciocínio lógico, uma vez que a matemática do ensino superior exige dos estudantes a capacidade de utilizar argumentos lógicos para provar afirmativas, conforme destaca Nasser (2009).

Artigue (1991) abordou as dificuldades que surgem para os estudantes no curso introdutório de Cálculo, destacando que, no ensino tradicional dessa disciplina, tais dificuldades geralmente são resolvidas por meio de uma excessiva algebrização, especialmente, quanto ao predomínio da manipulação de fórmulas, em detrimento do estudo das funções; ao cálculo de derivadas, em detrimento das aproximações lineares; ao cálculo de primitivas, em detrimento da busca de significados para a integral; aos algoritmos para calcular equações diferenciais, em detrimento de solucioná-las por meio de aproximações numéricas e gráficas.

As pesquisas acima elencadas e a nossa prática como docente da disciplina Cálculo nos fazem perceber que os estudantes têm dificuldades de aprendizagem por não desenvolverem habilidades específicas, necessárias ao aprendizado do Cálculo, tais como: criar hipóteses, mobilizar o raciocínio dedutivo, manipular ideias, fazer generalizações e utilizar os conhecimentos adquiridos na resolução de situações reais que lhes são apresentadas; além de utilizar diferentes tipos de registros de representação como, por exemplo, escrita em língua natural ou materna, escrita algébrica, por tabelas, gráficos cartesianos e figuras. Ainda, Artigue (1991) cita as dificuldades de aprendizagem da Integral, que é um tópico de estudo do Cálculo que se concebe como uma ferramenta transdisciplinar útil na resolução de vários problemas que descrevem aspectos da realidade.

A Integral pode ser aplicada em diversas áreas de estudos, como, por exemplo, em Geometria, Física, Computação, Economia, dentre outras, colocando-se como ferramenta de diversas aplicações; por esse motivo, está presente nos conteúdos programáticos de vários cursos superiores como: Matemática, Engenharias, Biologia, Economia, dentre outros.

No entanto, destacamos que o estudante, por não conseguir estabelecer conexões entre teoria e prática, tem dificuldades em entender os conceitos relacionados à Integral, restringindo-se aos resultados numéricos, encontrados por meio de aplicações de técnicas, não percebendo os significados daquelas medidas nas mais distintas áreas das ciências. Ressalta-se, pelas pesquisas e por nossa experiência docente, que os professores tendem a trabalhar pouco as potencialidades que a Integral pode trazer para a construção do conhecimento e que “apesar de sua grande importância, o ensino de Integrais limita-se, muitas vezes, à memorização de técnicas de integração”. (REZENDE, 2003, p. 189).

Diante desse cenário, esta pesquisa se desenvolve no sentido de propor uma alternativa pedagógica para os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, promovendo situações em que o estudante poderá ampliar seu conhecimento sobre o significado da Integral, tendo contato com aplicações desse tópico em diversas áreas do conhecimento.

Tais aplicações poderão ser apresentadas em contextos intramatemáticos e extramatemáticos, de forma a possibilitar o estabelecimento de conexões entre os conteúdos matemáticos e da Matemática com situações presentes em contextos da vida real.

Businskas (2008) concebe conexões matemáticas em dois sentidos: primeiro, como aquelas relações com base nas quais a matemática é estruturada e é independente do aluno

e, posteriormente, como as relações por meio das quais, através dos processos do pensamento, a matemática é construída. Assim como em Flores e García (2017), consideramos as conexões intramatemáticas estabelecidas entre conceitos, procedimentos, teoremas, argumentos e representações matemáticas; e as conexões extramatemáticas, que estabelecem uma relação de um conceito ou modelo matemático com um problema em contexto (não matemático) ou de forma recíproca.

## **OBJETO DE INVESTIGAÇÃO: A INTEGRAL DEFINIDA**

Uma das aplicações da Integral Definida se destina a delimitar a área localizada sob uma curva em um plano cartesiano. Matemáticos e não matemáticos, ao longo do tempo, debruçaram-se em estabelecer processos para cálculo de áreas de forma a ampliar os conhecimentos matemáticos e de outros ramos científicos do mundo contemporâneo. Assim, esse objeto de estudo é abordado em níveis de profundidade diferentes, dependendo de cada curso.

No entanto, faz-se necessária uma abordagem voltada não só para as técnicas e métodos para o cálculo algébrico das integrais definidas das várias funções matemáticas, mas também para a representação das diversas aplicações. Entretanto, com um cronograma limitado, o docente não tem oportunidade de, apenas no ambiente de sala de aula, explorar as várias aplicações que fazem parte desse contexto. Em geral, as aplicações mais usuais estão relacionadas ao cálculo de área de uma região, comprimento de uma curva e volume de um sólido de revolução, trabalhadas, na maioria das vezes, com exemplos matemáticos desconectados do mundo real. Porém, são possíveis várias outras aplicações que são interessantes e importantes.

A partir desse contexto, indagamos: Em que medida os estudantes se apropriam do significado dos resultados encontrados nas integrais definidas? Que estratégias devem ser apresentadas ao estudante para que possa estabelecer conexões entre a teoria estudada sobre integrais definidas e situações em que essa teoria possa ser utilizada na prática? Quais os conceitos intramatemáticos e extramatemáticos (em outras disciplinas: física, química, biologia) podem ser explorados por meio de situações problemas que envolvem integrais definidas? Que significados tem a integral, considerando as interpretações geométricas e, mais precisamente, a medida de área e volume de superfície? Que práticas podem ser

realizadas para que possam emergir os significados da integral definida em diferentes áreas?  
Como a integral definida poderá ser trabalhada, considerando a transdisciplinaridade?

A escolha da Integral como objeto matemático de nossa investigação justifica-se por sua relevância na área de Matemática; por suas aplicações em outras áreas do conhecimento e pelo fato que de, em nossa experiência profissional, percebemos que as práticas pedagógicas comumente usadas dão conta apenas do trabalho com a integral definida de forma mecânica e os estudantes não conseguem estabelecer conexões dos resultados encontrados com outros significados que aqueles possam ter.

Corroboramos com Kouropatov e Dreyfus (2009) em que:

certamente não é possível imaginar a cultura científica moderna sem as integrais. Juntamente com a derivada, a integral forma o núcleo de um domínio matemático que é uma linguagem, um dispositivo e uma ferramenta útil para outros campos como a física, a engenharia, a economia e a estatística. Além disso, o conceito de integral representa uma ideia filosófica para a compreensão do mundo: a contemplação da totalidade das partes pequenas de um todo aporta conclusões sobre o todo em sua globalidade, assim como sobre sua estrutura interna e propriedades (KOUROPATOV; DREYFUS, 2009, p. 417).

Diante das indagações acima, direcionamos nosso trabalho no sentido de responder a uma questão principal para nossa pesquisa: como múltiplas aplicações podem contribuir para uma aprendizagem da integral definida com compreensão?

Nesse contexto, explicitamos os seguintes objetivos traçados para esta pesquisa:

- realizar estudo sobre estado do conhecimento sobre a pesquisa em ensino de cálculo integral;
- discutir aspectos epistemológicos, cognitivos, didáticos e tecnológicos referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de Integrais Definidas;
- analisar as contribuições do Pensamento Matemático Avançado para melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais, destacando suas aplicações em contextos intramatemáticos e extramatemáticos;
- propor situações com múltiplas aplicações da integral definida que possam contribuir para o aprendizado desse conceito.

Para tanto, realizamos um estudo sobre o ensino de cálculo integral no sentido de possibilitar a discussão dos aspectos epistemológicos, cognitivos, didáticos e tecnológicos, referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de aplicações das Integrais.

Nesta pesquisa, procuramos também referenciais teóricos acerca das contribuições do Pensamento Matemático Avançado para melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais, com enfoque para as aplicações em contextos intramatemáticos e extramatemáticos.

Selecionamos e analisamos, no Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a produção científica que tem por temática os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida. A leitura desses trabalhos foi essencial para ajudar-nos a delimitar caminhos na condução da nossa pesquisa. Inicialmente, selecionamos pesquisas, em nível de doutorado, no período de 2014 até o primeiro semestre de 2018, usando a expressão “ensino de cálculo integral”. O filtro foi realizado pela grande área de conhecimento “Multidisciplinar”, seguido da área de conhecimento “Ensino de Ciências e Matemática”. Após a leitura dos títulos desses trabalhos, selecionamos 09 (nove) teses com direcionamento, de acordo com seu título, para o ensino e aprendizagem do cálculo integral. Em seguida, ampliamos a busca incluindo também dissertações de mestrados que tratam do mesmo tema. Assim, foram selecionados 23 registros. Pretendemos, dessa forma, subsidiar-nos teoricamente para propor situações com múltiplas aplicações da integral definida que possam contribuir para o aprendizado desse conceito.

## **REFERENCIAL TEÓRICO- METODOLÓGICO**

No desenvolvimento de nossa tese, estão sendo considerados aspectos teóricos e metodológicos referentes ao Pensamento Matemático Avançado e da Engenharia Didática articulados com o Enfoque Ontossemiótico. Sequências didáticas estão sendo desenvolvidas com enfoque em aplicações da Integral Definida, que poderão ser aplicadas a estudantes de Cálculo dos cursos de Matemática e/ou Engenharias.

### ***Pensamento Matemático Avançado***

Essa teoria surgiu a partir de estudos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, com enfoque na preocupação da maneira pela qual estudantes e professores refletem a respeito de objetos matemáticos e suas inter-relações com os

processos de ensino e de aprendizagem da Matemática Avançada. Essa teoria pode-se comportar como um suporte ao professor, uma vez que, entendendo como se dá o desenvolvimento do pensamento matemático, esse pode estabelecer estratégias de ensino que estimule a ativação dos processos mentais dos estudantes, a fim de que esses possam ter uma aprendizagem mais plena sobre conceitos matemáticos.

O campo de pesquisa relacionado ao Pensamento Matemático Avançado (PMA) foi originado na década de 1980, no decorrer do evento *The International Group for the PME (Psychology of Mathematics Education)*, que teve como objetivo produzir uma obra com foco no Pensamento Matemático Avançado e como consequência a criação do *Advanced Mathematical Thinking Group* (IGLIORI; ALMEIDA, 2013). David Tall e Tommy Dreyfus foram os precursores/impulsionadores no desenvolvimento dessa teoria, que foi difundida e tomada como área de pesquisa por pesquisadores que realizavam trabalhos nos quais estudavam fenômenos acontecidos nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática do ensino superior, em especial os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral – o que nos motivou a tomar essa base teórica como *corpus* de nossa pesquisa.

Os autores Dreyfus (1991) e Tall (1991) afirmam que o Pensamento Matemático Avançado (PMA) permeia a aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que podem aparecer nos mais variados níveis escolares, manifestando-se com maior intensidade nos anos finais do ensino médio e ao longo do ensino superior.

As pesquisas relacionadas ao “Pensamento Matemático Avançado”, com enfoque no Cálculo, são consideráveis; alguns aspectos do Pensamento Matemático Avançado estão sendo utilizados em nossa pesquisa. Tall (1991), ao abordar a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, ressaltou que:

A transição do pensamento matemático elementar para o avançado envolve um convencimento à demonstração de maneira lógica baseada nas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva, que se manifesta durante os conflitos iniciais dos estudantes universitários com as abstrações formais enfrentadas por eles no primeiro ano da universidade (TALL, 1991, p. 20).

Nossa experiência profissional no ensino de Cálculo, tanto na universidade pública quanto em faculdades privadas, tem evidenciado as dificuldades que os estudantes, geralmente, apresentam durante o desenvolvimento do Cálculo I.



Para Dreyfus e Eisenberg (1990), isso se deve ao fato de o Cálculo constituir-se em um ramo da matemática superior que exige maior tempo aos estudos sobre problemas não triviais que, geralmente, estão presentes em seu processo de aprendizagem. Artigue (1998) ressalta que a formalização dos conteúdos de Matemática, requerida dos estudantes universitários, obriga-os a romper com o trabalho algébrico.

É possível que uma das causas da pouca compreensão nos conceitos relativos à Integral Definida, que é objeto de estudo de nossa pesquisa, seja a dificuldade dos alunos na transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado. Em nossa pesquisa, abordamos aspectos do Pensamento Matemático Avançado no desenvolvimento de sequências de atividades em que são destacadas situações que partem do elementar da Integral Definida para características e/ou propriedades em um nível de maior análise ou complexidade.

### ***Engenharia Didática baseada no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática***

As sequências didáticas possibilitam ao estudante construir um conhecimento significativo, ao mesmo tempo em que desencadeiam indagações, refutações e comparações, integrando as informações obtidas e descobertas. Torres *et al.* (2019, p. 524) retratam que Engenharia Didática “propõe um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula esboçadas a partir de um trabalho de concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino”

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; 3) implementação da experiência; 4) análise *a posteriori* e validação da experiência. Essas fases, interpretadas de acordo com o Enfoque Ontossemiótico, aportam ferramentas teóricas e metodológicas que possibilitam uma análise mais detalhada do objeto de estudo. Por essa razão, em nossa pesquisa, utilizaremos as quatro fases distintas da Engenharia Didática, baseadas no Enfoque Ontossemiótico, considerando as dimensões de análise (GODINO *et. al.*, 2014): 1) estudo preliminar das dimensões epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional; 2) desenho da trajetória didática,



seleção dos problemas, sequenciação e análise *a priori*, com indicação dos comportamentos esperados dos estudantes e do planejamento das intervenções controladas do docente; 3) implementação da trajetória didática; observação das interações entre pessoas e recursos e avaliação da aprendizagem atingida; 4) avaliação ou análise retrospectiva, baseada em um contraste entre o previsto no desenho da atividade e o observado em sua implementação. Também se realiza uma reflexão sobre as normas que condicionam o processo instrucional e sobre a idoneidade didática.

Em cada uma dessas fases, serão utilizadas, em nossa pesquisa, as seguintes dimensões de análise: *epistêmica-ecológica*: na qual são determinados os significados institucionais que estão presentes em cada fase, observando-se as relações e restrições institucionais que condicionam o processo de ensino e aprendizagem dos temas matemáticos – nesse caso, pesquisamos qual significado institucional da integral definida será destacado em cada fase; *cognitiva-afetiva*: que consiste na descrição dos significados pessoais dos estudantes em distintos momentos do processo de estudo. Contempla também a análise da sensibilidade do processo aos estados afetivos (atitudes, emoções, crenças, valores) dos estudantes com relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo – nessa fase é verificado qual significado pessoal o estudante apresenta para a Integral Definida, destacando o que esse conteúdo representa em cada uma das áreas ou subáreas em que está sendo aplicado; *instrucional*: baseada na análise dos padrões de interação entre docente, discente e a sequência didática, focada na fixação e na negociação de significados – fase que ainda será realizada e irá refletir sobre a atuação do estudante e professor na execução das atividades propostas.

### ***Síntese Metodológica***

Trabalhamos, em nossa pesquisa, com uma abordagem qualitativa, focada na aprendizagem dos estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharias, sobre as aplicações da integral definida em contextos intramatemáticos e extramatemáticos, que envolvem a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada.

Nossa proposta metodológica é desenvolver aplicações da Integral Definida, por meio de sequências de atividades que desafiem a curiosidade, possibilitando ao estudante

refletir sobre propriedades e conceitos que possam emergir da prática realizada. De acordo com Dreyfus (2002), para que um estudante atinja a compreensão de um objeto matemático não é suficiente apenas definir e exemplificar um conceito abstrato, mas construir as propriedades de um determinado conceito por meio de deduções a partir da definição. Essa reflexão sobre as experiências realizadas é uma característica do Pensamento Matemático Avançado a qual pretendemos que nosso estudante desenvolva.

Algumas aplicações a serem utilizadas na pesquisa terão suporte das tecnologias digitais, mais precisamente do *software* GeoGebra para implementação dessas. Por meio da tecnologia, pretendemos que o estudante possa criar uma relação entre o real (objetos tridimensionais do mundo real) e suas possíveis representações matemáticas, de forma a explorar as capacidades de abstração e formalização de ideias. E, assim como retrata Trevisan e Mendes (2017, p. 365), nesse tipo de proposta metodológica:

o papel do professor é o de organizador da reconstrução das ideias e conceitos matemáticos dos estudantes, de tal forma que o conhecimento matemático se faz dinâmico e construído a partir das relações, justificativas, análises e validações estabelecidas pelos envolvidos. (TREVISAN; MENDES, 2017, p. 365)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de integrais na formação do professor é importante, pois ela representa a ferramenta para diversas aplicações, como, por exemplo: cálculo de áreas, perímetros, volumes, trabalho realizado por uma força, centro de massa, montante, dentre outras.

Defendemos a ideia de que o ensino da técnica é fundamental, porém, a técnica isolada não possibilita uma aprendizagem significativa. Por isso, nossa pesquisa engloba a utilização de aspectos das aplicações na condução do processo de ensino das Integrais Definidas, pois um processo de ensino e aprendizagem baseado na relação teoria e prática pode-se revelar um ambiente rico para essas conexões. A articulação coerente entre a teoria e a prática, por meio da investigação, consiste em um objetivo a ser alcançado na educação.

Em muitos casos, há uma restrição da didática com problemas usuais e, muito frequentemente, problemas relacionados à Física. Esse tipo de procedimento leva à formação deficitária do acadêmico que, quando se depara com situações diferentes, não sabe resolver o problema proposto, ou mesmo não tem ideia de se os resultados obtidos expressam o que realmente eles pretendiam determinar.

Durante o desenvolvimento das atividades, espera-se que os estudantes possam fazer observações, levantar conjecturas, buscando validá-las. Como se trata de uma pesquisa em andamento, ainda não temos resultados para análise, que ocorrerá de forma qualitativa a partir da observação e dos registros das atividades desenvolvidas pelos acadêmicos em consonância com os resultados das pesquisas realizadas em didática do Cálculo.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela Bolsa de Estudos concedida, o que está permitindo o desenvolvimento desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011, 353 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, p. 167-198, 1991.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget. Cap. 4. p. 193-217, 1996.
- ARTIGUE, M. **L'évolution des problématique sem didactique de l'analyse**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18 (2): 231-262, 1998.
- BUSINSKAS, A. **Conversations About Connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections**. 183f. Tese (Doutor em Filosofia) – Faculdade de Educação, Universidade Simon Fraser, Canadá, 2008.
- DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, p. 25-41, 1991.
- DREYFUS, T.; EISENBERG, T. **On difficulties with diagrams: theoretical issues**. Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2: 27-33, 1990.
- FLORES, C. GARCIA, J. Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel

Superior. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 158 - 180, abr. 2017. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0158.pdf>. Acesso em 16/08/2019.

GODINO, JD., RIVAS, H., ARTEAGA, P., LASA, A. e WILHELMI, MR. Engenharia didática baseada na abordagem ontológico - semiótica do conhecimento e instrução matemática. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, 34,167-200, 2014. Disponível em [https://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](https://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm). Acesso em 10/03/19.

IGLIORI, Sonia Cristina B.; ALMEIDA, Marcio Vieira de. Educação matemática no ensino superior e abordagens de Tall sobre o ensino: aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17617/pdf>. Acesso em: 02/03/2019.

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Integrals as accumulation: a didactical perspective for school mathematics. In: TZEKAKI, M.; KALDRIMIDOU, M.; SAKONIDIS, H. (Eds.). **Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 3, pp. 417-424. Thessaloniki, Greece: PME, 2009.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M.C.R. e NASSER, L. (org.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, p. 43-58, 2009.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates**. Recife: SBEM, p. 81-98, 2009.

REZENDE, W.M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**, New York, Kluwer Academic Publishers 2002.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking** (pp. 3-21). Netherlands: Kluwer, A. P., 1991.

TORRES, P. V. ZANG, C. M. METZEN, G. A. F. LEÓN, M. N. Descripción de una experiencia didáctica sobre la integral definida en el marco de un congreso de Educación Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.1, pp.525-541, 2019. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/37232/pdf>. Acesso em 15/08/2019.

TREVISAN, A. L. MENDES, M. T. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.3, pp.353-373, 2017. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/33318/pdf>. Acesso em 15/08/2019.